

Równania całkowe

Równaniem całkowym nazywamy równanie, w którym niewiadoma funkcja $\Phi(x)$ występuje pod znakiem całki. Klasyfikacja różnych typów równań opiera się na trzech cechach równania :

1. Jeżeli $\Phi(x)$ występuje wyłącznie pod znakiem całki to równanie całkowe jest równaniem pierwszego rodzaju, natomiast przy funkcji $\Phi(x)$ pojawiającej się zarówno pod znakiem całki jak i "na zewnątrz" mamy do czynienia z równaniem całkowym drugiego rodzaju.
2. Jeżeli obie granice całkowania są stałymi to równanie nazywamy równaniem klasy Fredholma lub krótko równaniem Fredholma. Jeżeli jedna z granic jest stałą, a druga zmienną, to równanie jest równaniem (klasy) Volterry.
3. Jeżeli w równaniu poza całką oraz niewiadomą funkcją $\Phi(x)$ pojawia się dodatkowy składnik, funkcja $f(x)$, to równanie jest równaniem całkowym niejednorodnym; dla $f(x)=0$ mamy równanie całkowe jednorodne.

Tak więc niejednorodne równania całkowe mogą mieć postać:

1. Fredholma pierwszego rodzaju:

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) \Phi(t) dt$$

2. Fredholma drugiego rodzaju:

$$\Phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \Phi(t) dt$$

3. Volterry pierwszego rodzaju:

$$f(x) = \int_a^x K(x, t) \Phi(t) dt$$

4. Volterry drugiego rodzaju:

$$\Phi(x) = f(x) + \int_a^x X(x, t) \Phi(t) dt$$

Poniżej zajmiemy się jedną z metod rozwiązywania równań całkowych. Metoda ta pozwala na rozwiązywanie niejednorodnych równań Fredholma drugiego rodzaju i nazywamy ją iteracyjną metodą rozwiązywania równań całkowych. Niech będzie dane równanie:

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \Phi(t) dt$$

Pojawiający się w tym równaniu parametr λ jest pewną stałą, a jego rola stanie

się jasna w dalszych rachunkach. W celu uproszczenia zapisu wprowadźmy definicję

$$\mathcal{K}\Phi = \int_a^b K(x, t)\Phi(t) dt,$$

gdzie \mathcal{K} będziemy nazywać operatorem całkowym Fredholma albo krótko operatorem Fredholma, z jądrem K . Zdefiniujmy także \mathcal{K}^n jako

$$\mathcal{K}^n \Phi = \mathcal{K}(\mathcal{K}^{n-1} \Phi)$$

Metoda iteracyjna rozwiązywania równania to metoda kolejnych przybliżeń. Korzystając z definicji operatora Fredholma, otrzymujemy:

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \mathcal{K}\Phi$$

Pierwszym przybliżeniem dla szukanej funkcji $\Phi(x)$ niech będzie

$$\Phi(x) \approx \Phi_0(x) = f(x)$$

Zakładamy więc, że iloczyn $\lambda \mathcal{K}\Phi$ jest mały w porównaniu z $f(x)$. Nie zawsze tak będzie, ale nawet wtedy metoda nie musi nas zawieść, choć jej skuteczność (zbieżność iteracji) będzie kiepska. Podkreślmy, że wybór $\Phi_0(x) \approx f(x)$ nie jest obowiązkowy. Jeżeli ktoś potrafi zaproponować (odgadnąć) $\Phi_0(x)$ stanowiące lepsze (niż f) przybliżenie $\Phi(x)$ to może, a nawet powinien to zrobić. Kolejny krok metody to – jak w metodach iteracyjnych – potraktowanie wzoru

$$\Phi_n(x) = f(x) + \lambda \mathcal{K}\Phi_{n-1}$$

jako “przepisu” określającego kolejne przybliżenie w oparciu o przybliżenie właśnie uzyskane. Otrzymujemy ciąg przybliżeń szukanej funkcji $\Phi(x)$

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= f(x) + \lambda \mathcal{K}\Phi_0 = f(x) + \lambda \mathcal{K}f \\ \Phi_2(x) &= f(x) + \lambda \mathcal{K}\Phi_1 = f(x) + \lambda \mathcal{K}f + \lambda^2 \mathcal{K}^2 f \\ &\vdots \\ \Phi_n(x) &= f(x) + \lambda \mathcal{K}\Phi_{n-1} = f(x) + \lambda \mathcal{K}f + \lambda^2 \mathcal{K}^2 f + \dots + \lambda^n \mathcal{K}^n f \end{aligned}$$

Ostatnie równanie przepisujemy w postaci szeregu zwanego szeregiem Neumanna:

$$\Phi_n(x) = \sum_{m=0}^n \lambda^m \mathcal{K}^m f$$

Oczekujemy oczywiście, że nasze rozwiązanie to

$$\Phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \mathcal{K}^m f,$$

pod warunkiem, że występująca we wzorze granica istnieje, tzn. że szereg

Neumanna jest zbieżny. O zbieżności decyduje twierdzenie:

Jeżeli

1. jądro równania całkowego $K(x,t)$ jest całkowne z kwadratem, tzn:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dt dx = B^2 < \infty$$

2. występujący w równaniu parametr λ spełnia

$$|\lambda| < \frac{1}{B}$$

to szereg Neumanna dla tego równania jest zbieżny i stanowi jednoznaczne rozwiązanie równania.

Przykłady

1. Obliczyć trzy pierwsze przybliżenia rozwiązania równania $\phi(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 \phi(t) dt$

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 dt = 1 + x \int_0^1 t^2 dt = 1 + \frac{1}{3}x$$

$$\phi_2(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 \left(1 + \frac{1}{3}t\right) dt = 1 + \frac{5}{12}x$$

$$\phi_3(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 \left(1 + \frac{5}{12}t\right) dt = 1 + \frac{7}{16}x$$

Rozwiązaniem tego równania jest $\phi(x) = 1 + \frac{4}{9}x$

2. Obliczyć trzy pierwsze przybliżenia rozwiązania równania

$$\phi(x) = 5\frac{x}{6} + \frac{1}{2} \int_0^1 xt \phi(t) dt$$

$$\phi_0(x) = \frac{5}{6}x$$

$$\phi_1(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xt \frac{5}{6}t dt = \frac{35}{36}x$$

$$\phi_2(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xt \frac{35}{36}t dt = \frac{215}{216}x$$

$$\phi_3(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xt \frac{215}{216}t dt = \frac{1295}{1296}x$$

Literatura

1. Andrzej Lenda "Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki"

2. M. L. Krasow, A. I. KIsielew, G. I. Makarenko "Zadania z równań całkowych"

3. S. G. Michlin, C.L. Smolicki "Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych"